حل نموذج بجروت

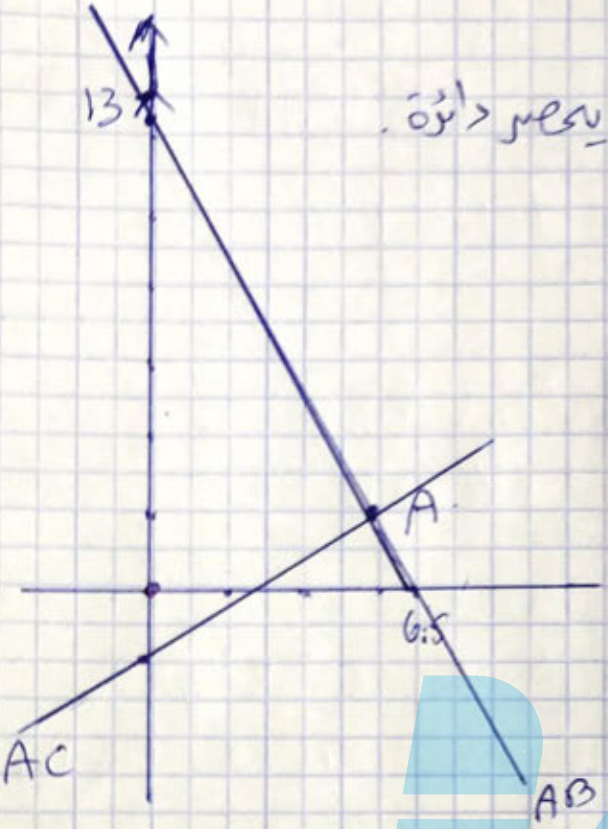
(807)-582

موعد مُتعذرين شتاء 2022

طاقم الرياضيات

معهد IQ

سؤال 1



بحسب المعطيات , مثلث ABC محصور دائرة.

$AB: 2x+y-13=0$

$AC: -x+2y+4=0$

المركز $M(x_m, y_m)$

معلوم أن مركز الدائرة يقع على المستقيم $y=x-1$

ولذلك نتمكن التعبير عن إحداثيات النقطة M كالتالي:

$M(x_m, x_m-1)$

ومعطى ان:

النقطة (0,0) تقع داخل المثلث.

نرسم المستقيمات في هيئة محاور ونلاحظ أن النقطة (0,0) تقع تحت المستقيم AB وفوق المستقيم AC

ولذلك وبما أن معامل y في معادلة المستقيمين موجب

لذلك نأخذ الإشارة (−) في بسط قانون البعد عندما نحسب بعد المركز عن AB ونأخذ الإشارة (+) في بسط قانون البعد عندما نحسب بعد المركز عن AC.

$$\text{بُعد } M \text{ عن } AC = \frac{-x_m+2(x_m-1)+4}{\sqrt{(-1)^2+2^2}} = \frac{x_m+2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{بُعد } M \text{ عن } AB = \frac{-1(2x_m+(x_m-1)-13)}{\sqrt{(2)^2+1^2}} = \frac{-1(3x_m-14)}{\sqrt{5}} = \frac{14-3x_m}{\sqrt{5}}$$

بُعد M عن AB = بُعد M عن AC ويساوي R:

$$\frac{x_m+2}{\cancel{\sqrt{5}}} = \frac{14-3x_m}{\cancel{\sqrt{5}}} \Longrightarrow 4x_m = 12 \Longrightarrow \boxed{x_m=3}$$

وبالتالي: $y_m = x_m-1 = 2$ أي أن مركز الدائرة هو

$$\boxed{M(3,2)}$$

إذا احداثيات مركز الدائرة $M:(3,2)$

نجد طول نصف القطر R وهو بعد المركز $M(3,2)$ عن AB

$$R=\frac{|2\cdot3+2-13|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|-5|}{\sqrt5}=\frac{5}{\sqrt5}=\sqrt5 \Rightarrow R=\sqrt5$$

معادلة الدائرة من الصورة:

$$(x-x_m)^2+(y-y_m)^2=R^2$$

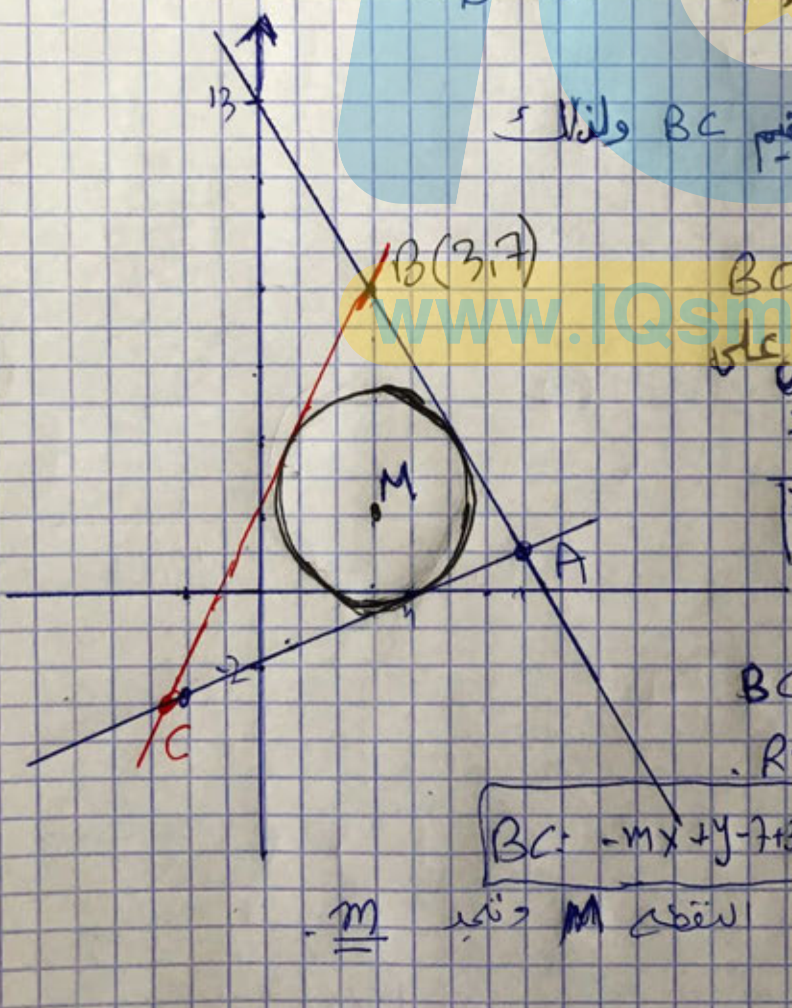
$$\boxed{(x-3)^2+(y-2)^2=5}$$

ب. معطى أنّ BM عمودي على المحور x إذاً الاحداثي x للنقطة M وللنقطة B هو نفسه أي $x_B=x_m=3$

النقطة $B(3,y_B)$ تقع على AB وتحقق معادلته نعوض في معادلة AB نحصل على:

$AB: 2x+y-13=0$

$2\cdot3+y_B-13=0 \rightarrow \boxed{y_B=7}$ $\boxed{B:(3,7)}$



النقطة B تقع على المستقيم BC ولذلك تحقق معادلته:

نفرض $BC: y=mx+n$

نعوض النقطة B, نحصل على

$7=m\cdot3+n$

نحصل على $\boxed{7-3m=n}$

إذاً $BC: y=mx+(7-3m)$

بعد مركز الدائرة عن BC هو نصف القطر $R=\sqrt5$.

ننقل المعادلة للصورة $\boxed{BC: -mx+y-7+3m=0}$

نعوض في قانون البعد النقطة M ونجد $\underline{m}$.

$$\sqrt{5} = \frac{|-m\cancel{\cdot 3}+2+\cancel{3m}-7|}{\sqrt{(-m)^2+1^2}} \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{|-5|}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5}\cdot\sqrt{m^2+1} = 5 \xRightarrow{(\;)^2} 5(m^2+1) = 25$$

$$m^2+1=5 \Rightarrow m^2=4 \Rightarrow m=\pm 2$$

بحسب الرسم نرى المستقيم BC تصاعدي لذلك ميله موجب

اذاً: $\boxed{m=2}$, نجد n:

$n = 7-3m$

$n = 7-3\cdot 2 = 1$

$$\boxed{BC: y = 2x+1}$$

*ملاحظة: اذا عوضنا $m=-2$ سنحصل على معادلة المستقيم AB

(ب) مركز الدائرة الحاصرة للمثلث هو ملتقى الاعمدة المتوسطة لاضلاع المثلث. نجد معادلات الاعمدة المتوسطة ومن ثم نجد نقطة تقاطع اثنين من بينهم ونجد مركز الدائرة.

لكي نجد معادلات الاعمدة المتوسطة علينا ان نجد احداثيات رؤوس المثلث اولاً.

الرأس A هو تقاطع AB و AC

$AB:\ 2x+y-13=0$

$AC:\ -x++2y+4=0 \quad / \times 2$

$$+\begin{array}{r} 2x+y-13=0 \\ -2x+4y+8=0 \\ \hline 5y-5=0 \end{array} \Rightarrow \boxed{y=1}$$

نعوض ونجد x: $-x+2y+4=0$

$-x+2+4=0 \Rightarrow \boxed{x=6}$

$$\boxed{A(6,1)}$$

C هي تقاطع BC مع AC

$AC: -x+2y+4=0$

$BC: y=2x+1$

$-x+2(2x+1)+4=0$

$-x+4x+2+4=0$

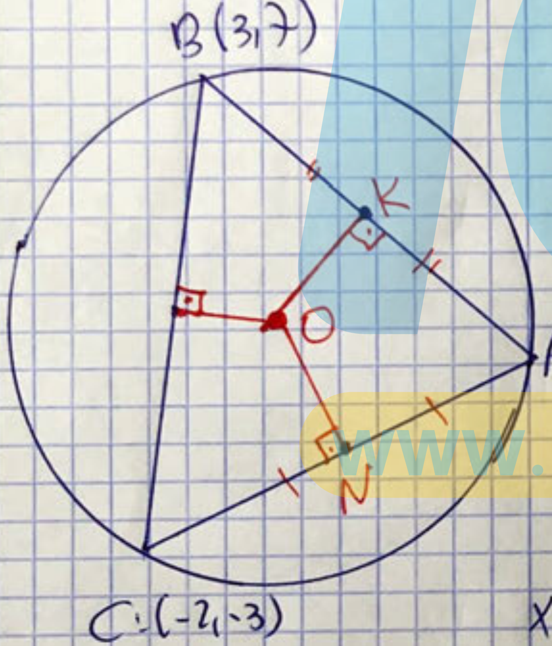
$3x+6=0 \Longrightarrow \boxed{x=-2}$

نجد y:

$y=2x+1 \quad \boxed{x=-2}$

$y=2\cdot(-2)+1=-3 \quad \boxed{y=-3}$

$\boxed{C:(-2,-3)}$



مركز الدائرة الحاصرة للمثلث هو ملتقى الاعمدة المتوسطة لاضلاع المثلث.

نجد معادلة عمودين متوسطين

$ON \perp AC$ و $OK \perp AB$

نجد احداثيات K منتصف AB

$x_K=\frac{3+6}{2}=4.5 \quad y_K=\frac{7+1}{2}=4$

$\boxed{K(4.5,4)}$

$AB: 2x+y-13=0 \Longleftarrow$ ميل OK $= \frac{-1}{\text{ميل } AB}$

$y=-2x+13$

ميل AB هو -2 اذاً ميل $OK=\frac{1}{2}$ ويمر ب $(4.5,4)$

$OK: y=ax+b \Longrightarrow 4=\underbrace{\frac{1}{2}\cdot 4.5}_{2.25}+b \Longrightarrow y=\frac{1}{2}x+1.75$

$\boxed{OK: y=\frac{1}{2}x+1.75}$

نجد احداثيات N منتصف AC

$$x_N = \frac{6+(-2)}{2} = 2 \qquad y_N = \frac{1+(-3)}{2} = -1$$

$$N(2,-1)$$

نجد معادلة ON

$$\text{ميل } ON = \frac{-1}{\text{ميل } AC}$$

$$AC: -x+2y+4=0 \longrightarrow y = \frac{1}{2}x+4$$

$$\text{اذاً ميل } ON = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

$$ON: y = -2x+b_1 \;\underset{N(2,-1)}{\Longrightarrow}\; -1 = 2(-2)+b_1$$

$$\boxed{3 = b_1}$$

$$\boxed{ON: y = -2x+3}$$

مركز الدائرة الحاصرة، O، هي تقاطع ON مع OK، نحصل على:

$$y = -2x+3$$
$$y = \frac{1}{2}x+1.75 \Rightarrow \frac{1}{2}x+1.75 = -2x+3$$
$$2.5x = 1.25$$
$$y = -2\left(\frac{1}{2}\right)+3 = 2 \Longleftarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

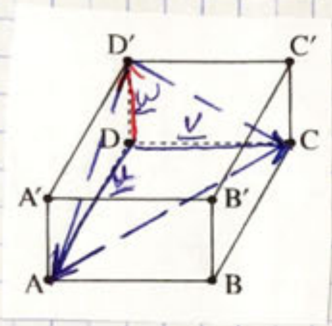
$$O\left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

البعد بين $O\left(\frac{1}{2},2\right)$ و $M(3,2)$ هو

$$d = \sqrt{\left(3-\frac{1}{2}\right)^2+(2-2)^2} = \sqrt{(2.5)^2+0^2} = 2.5$$

اذاً البعد بين مركزي الدائرتين الحاصرة للمثلث والمحصورة داخله هو $\boxed{2.5}$

سؤال 2



بحسب المعطيات:

* $ABCDA'B'C'D'$ موشور قائم قاعدته معين

$\vec{DD'} = \underline{w}$ $\quad \vec{DC} = \underline{v}$ $\quad \vec{DA} = \underline{u}$ $\quad |\vec{DC}| = 4$

* النقطة F تقع على المستوى ACD'
  ويتحقق: $\measuredangle ADC = 120°$
* وكذلك معطى ان $\vec{D'F} = t\cdot\vec{D'A} + \frac{1}{4}\vec{D'C}$
* $\vec{DF}$ يُعامد المستوى ACD'.
* بما ان $ABCD$ معين لذلك $|\vec{DA}| = |\vec{DC}| = |\underline{u}| = |\underline{v}| = 4$

وبما ان الموشور قائم يكون ان:

$\vec{DD'} \perp \vec{DC} \Rightarrow \underline{w}\cdot\underline{v} = 0$

$\vec{DD'} \perp \vec{AD} \Rightarrow \underline{w}\cdot\underline{u} = 0$

بما ان $\measuredangle ADC = 120°$ اذا:

$\underline{u}\cdot\underline{v} = |\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos 120$

$\underline{u}\cdot\underline{v} = 4\cdot4\cdot(-\frac{1}{2}) = -8 \Rightarrow \boxed{\underline{u}\cdot\underline{v} = -8}$

أ) $\vec{DF} = \vec{DD'} + \vec{D'F} = \underline{w} + t\cdot\vec{D'A} + \frac{1}{4}\vec{D'C}$

$\vec{DF} = \underline{w} + t(\underline{u}-\underline{w}) + \frac{1}{4}(\underline{v}-\underline{w}) = \underline{w} + t\underline{u} - t\underline{w} + \frac{1}{4}\underline{v} - \frac{1}{4}\underline{w}$

$$\boxed{\vec{DF} = t\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} + (\frac{3}{4}-t)\cdot\underline{w}}$$

ب) بما ان $\vec{DF}$ يعامد المستوى ACD'

اذا $\vec{DF}$ عمودياً على $\vec{AC}$ اي $\vec{DF}\cdot\vec{AC} = 0$

$\vec{AC} = \underline{v} - \underline{u}$

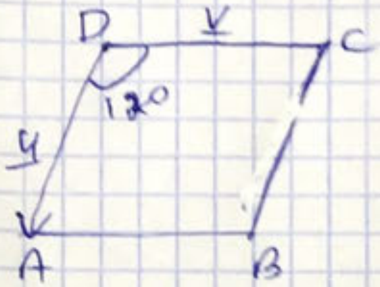
$\Rightarrow (\underline{v}-\underline{u})(t\cdot\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{v} + (\frac{3}{4}-t)\cdot\underline{w}) = 0$

$$t\underbrace{\underline{u}\cdot\underline{v}}_{-8} - t\underbrace{\underline{u}\cdot\underline{u}}_{|\underline{u}|^2=16} + \frac{1}{4}\underbrace{\underline{v}\cdot\underline{v}}_{|\underline{v}|^2=16} \overbrace{-\frac{1}{4}\underline{u}\cdot\underline{v}}^{8} + (\frac{3}{4}-t)\cdot\overbrace{\underline{v}\cdot\underline{w}}^{0} - (\frac{3}{4}-t)\overbrace{\underline{u}\cdot\underline{w}}^{0} = 0$$

$-8t - 16t + \frac{1}{4}\cdot16 + 2 = 0 \Rightarrow -24t + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{t = \frac{1}{4}}$

P. حجم الموشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

مساحة القاعدة = $S_{ABCD} = |u|\cdot|v|\cdot\sin 120^\circ = 4\cdot 4\cdot\frac{\sqrt3}{2} = 8\sqrt3$



نجد ارتفاع الموشور $|w|$

بما أن $\vec{DF}$ يعامد المستوى ACD' اذاً

$\vec{DF}\cdot\vec{CD'}=0 \Leftarrow$ يعامد $\vec{CD'}$ $\vec{DF}$

$\vec{DF} = t\,u + \frac14 v + \left(\frac34 - t\right)\cdot w$ $\quad t=\frac14$

$\vec{DF} = \frac14 u + \frac14 v + \left(\frac34 - \frac14\right) w$

$\boxed{\vec{DF} = \frac14 u + \frac14 v + \frac12 w}$

$\vec{CD'} = w - v$

$\vec{DF}\cdot\vec{CD'} = \left(\frac14 u + \frac14 v + \frac12 w\right)(w - v) = 0$

$\frac14 \underbrace{u\cdot w}_{0} - \frac14 \underbrace{v\cdot w}_{0} + \frac12 w\cdot w - \frac14 \underbrace{u\cdot v}_{(-8)} - \frac14 \underbrace{v\cdot v}_{|v|^2=16} - \frac12 \underbrace{w\cdot v}_{0} = 0$

$\frac12 w^2 + 2 - 4 = 0 \Rightarrow \frac12 |w|^2 = 2$

$|w|^2 = 4 \Rightarrow \boxed{|w| = 2}$

$V_{\text{الموشور}} = (8\cdot\sqrt3)\cdot 2 = \boxed{16\cdot\sqrt3}$

ه. $D(0,0,0)$ $\quad C:(-2,\sqrt{12},0)$

D' يقع على الجزء الموجب للمحور Z ، $C:(-2,\sqrt{12},0)$

وبما أن $|\vec{DD'}| = |w| = 2$ لذلك $D:(0,0,2)$ وبما أن $|u|=4$ لذلك $A(4,0,0)$

$v = \vec{DC} = C - D = (-2,\sqrt{12},0)$ // $u = \vec{DA} = A - D = (4,0,0)$

$w = \vec{DD'} = (0,0,2)$

نجد $\vec{DF}$:

$\vec{DF} = \frac14 u + \frac14 v + \frac12 w = \frac14(0,0,0) + \frac14(-2,\sqrt{12},0) + \frac12(0,0,2)$

$\vec{DF} = \left(\frac12, \frac{\sqrt{12}}{4}, 1\right) \Rightarrow \vec{DF} = F - D = (x_F, y_F, z_F) - (0,0,0)$

$\boxed{F:\left(\frac12, \frac{\sqrt{12}}{4}, 1\right)}$

سؤال 3

$$(z+i)^2-2-2\sqrt{3}\cdot i=0$$

$$z^2+2iz-1-2-2\sqrt{3}\,i=0$$

$$z^2+2iz-3-2\sqrt{3}\,i=0$$

$$z_{1,2}=\frac{-2i\mp\sqrt{(2i)^2-4(1)(-3-2\sqrt{3}\,i)}}{2}=\frac{-2i\mp\sqrt{-4+12+8\sqrt{3}\,i}}{2}$$

$$z_{1,2}=\frac{-2i\mp\sqrt{8+8\sqrt{3}\,i}}{2}$$

نحسب $\sqrt{8+8\sqrt{3}\,i}$

نفرض $a+bi=\sqrt{8+8\sqrt{3}\,i}$ (a,b اعداد حقيقية)

تربيع الطرفين

$$(a+bi)^2=8+8\sqrt{3}\,i$$

$$a^2+2abi-b^2=8+8\sqrt{3}\,i$$

(1) $a^2-b^2=8$

(2) $2abi=8\sqrt{3}\,i \Longrightarrow ab=4\sqrt{3} \Rightarrow a=\frac{4\sqrt{3}}{b}$

نعوض في (1) مكان a نحصل على:

$$\left(\frac{4\sqrt{3}}{b}\right)^2-b^2=8$$

$$\times b^2 \,/\, \frac{48}{b^2}-b^2=8 \,/\, 48-b^4=8b^2$$

$$\Longrightarrow b^4+8b^2-48=0$$

$$b^2_{1,2}=\frac{-8\mp\sqrt{8^2-4\cdot1\cdot(-48)}}{2}=\frac{-8\mp\sqrt{64+192}}{2}=\frac{-8\mp\sqrt{256}}{2}$$

$$b^2_{1,2} = \frac{-8 \mp 16}{2}$$

$$b^2_1 = \frac{-8+16}{2} = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow \boxed{b^2 = 4}$$

$$b^2_2 = \frac{-8-16}{2} = -12$$ غير ممكن

لأن b^2 دائماً موجب.

إذاً $b^2 = 4 \Rightarrow \boxed{b = \pm 2}$

$$a = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{b} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Longrightarrow a = 2\sqrt{3} \quad b = 2$$

$$\boxed{a + bi = 2\sqrt{3} + 2i}$$

$$a = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{-2} = -2\sqrt{3} \Longrightarrow \boxed{a + bi = -2\sqrt{3} - 2i}$$

$$z_{1,2} = \frac{-2i \mp \sqrt{8 + 8\sqrt{3}i}}{2}$$

$$z_1 = \frac{-2i + 2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} \Longrightarrow \boxed{z_1 = \sqrt{3}}$$

$$z_2 = \frac{-2i - 2\sqrt{3} - 2i}{2} = \frac{-2\sqrt{3} - 4i}{2} \Longrightarrow \boxed{z_2 = -\sqrt{3} - 2i}$$

(ب) $a_1 < a_2 \Leftarrow a_1 = -\sqrt{3}, \quad a_2 = +\sqrt{3}$

I: $|z - ia_1| = \sqrt{3} \Longrightarrow |z - i(-\sqrt{3})| = \sqrt{3}$

$$\Longrightarrow |z + \sqrt{3}i| = \sqrt{3}$$

نفرض $z = x + iy$

$$\Longrightarrow |(x+iy) + \sqrt{3}i| = \sqrt{3} \Longrightarrow |x + i(y+\sqrt{3})| = \sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow \sqrt{x^2 + (y+\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$$

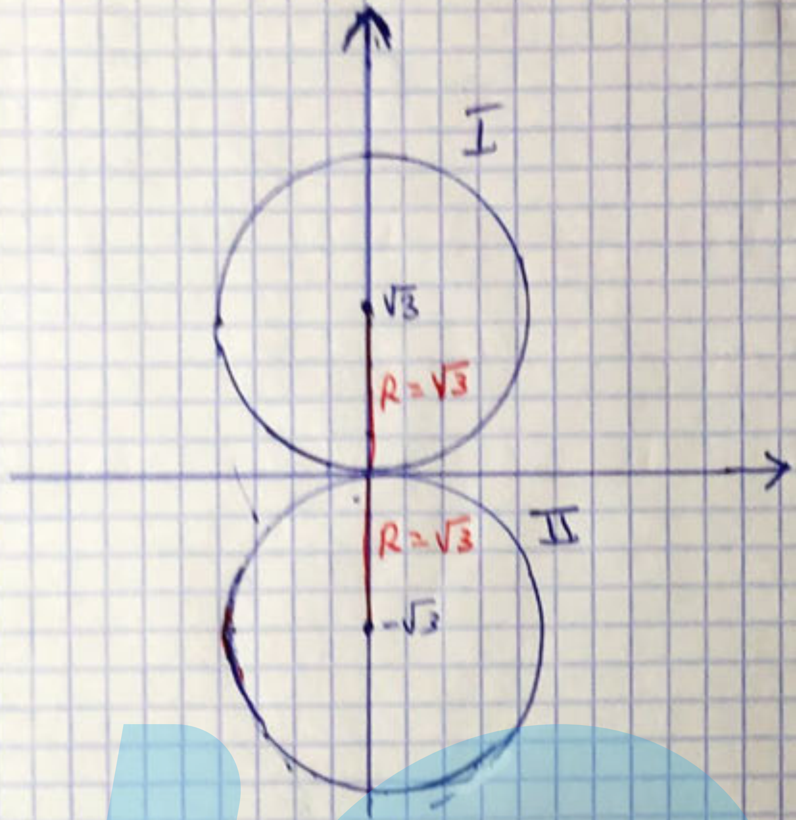
$$()^2 \Longrightarrow \boxed{x^2 + (y+\sqrt{3})^2 = 3}$$

وهذه معادلة دائرة مركز $(0, \bar{\sqrt{3}})$ ونصف قطرها $\sqrt{3}$

II $|z - ia_2| = |x + iy - i(-\sqrt{3})| = \sqrt{3} \Longrightarrow |x + i(y - \sqrt{3})| = \sqrt{3}$

$$\sqrt{x^2 + (y - \sqrt{3})^2} = \sqrt{3} \xRightarrow{()} \boxed{x^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 3}$$

وهذه معادلة لدائرة مركزها $(0, \sqrt{3})$ ونصف قطرها $\sqrt{3}$



٩ نجد نقاط التقاطع بين المستقيم $y=x$ والدائرتين

مع دائرة II: $x^2+(x+\sqrt{3})^2=3$

$\Rightarrow x^2+x^2+2\sqrt{3}x+\cancel{3}=\cancel{3} \Rightarrow 2x^2+2\sqrt{3}x=0$

$2x(x+\sqrt{3})=0 \Rightarrow$ $x=0$, $y=0$; $x=-\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{3}$

$(0,0)$ $\boxed{(-\sqrt{3},-\sqrt{3})=w_2}$

مع دائرة I:

$x^2+(x-\sqrt{3})^2=3 \Rightarrow x^2+x^2-2\sqrt{3}x+\cancel{3}=\cancel{3}$

$2x^2-2\sqrt{3}x=0 \Rightarrow 2x(x-\sqrt{3})=0$ → $x=0 \to y=0$; $x=\sqrt{3} \to y=\sqrt{3}$

$(\sqrt{3},\sqrt{3})=w_1$

اذاً: $\boxed{w_1=\sqrt{3}+\sqrt{3}i}$ $\boxed{w_2=-\sqrt{3}-\sqrt{3}i}$

$\overline{w_1}=\sqrt{3}-\sqrt{3}i$ $\overline{w_2}=-\sqrt{3}+\sqrt{3}i$

نحول w_1 , w_2 و $\overline{w_1}$, $\overline{w_2}$ للصورة القطبية

$w_1=\sqrt{6}\,cis\,45$ $\overline{w_1}=\sqrt{6}\cdot cis(-45)$

$w_2=\sqrt{6}\,cis\,225$ $\overline{w_2}=\sqrt{2}\,cis(-225)$

$Z^3=(\sqrt{6}\cdot cis\,45)(\sqrt{6}\,cis(-45))\cdot(\sqrt{6}\,cis(225))(\sqrt{6}\cdot cis(-225))$

$$Z^3=(\sqrt{6})^4\cdot cis(45-45+225-225)$$

$$Z^3=36\cdot cis\,0$$

$$Z_K=\sqrt[3]{36}\cdot cis\left(\frac{0+360K}{3}\right)=\sqrt[3]{36}\cdot cis\,120K$$

$K=0 \quad Z_0=\sqrt[3]{36}\cdot cis\,0=\sqrt[3]{36}$

$K=1 \quad Z_1=\sqrt[3]{36}\cdot cis\,120$

$K=2 \quad Z_2=\sqrt[3]{36}\cdot cis\,240$

إذاً حلول المعادلة:

$\boxed{Z_0=\sqrt[3]{36}}$ $\boxed{Z_1=\sqrt[3]{36}\cdot cis120}$

$\boxed{Z_2=\sqrt[3]{36}\cdot cis240}$

سؤال 4

$$f(x) = \frac{ax}{\ln x - a} \qquad a > 0$$

1) مجال التعريف $x > 0$ وأيضاً $\ln x - a \neq 0$

$\rightarrow \ln x \neq a \Rightarrow x \neq e^{a}$

إذاً مجال التعريف

$x > 0 \,,\ x \neq e^{a}$

او ممكن كتابته كالتالي:

$0 < x < e^{a} \,,\quad x > e^{a}$

2)

$$f'(x) = \frac{a(\ln x - a) - ax \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x - a)^2}$$

$$f'(x) = \frac{a(\ln x - a) - a}{(\ln(x) - a)^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow a(\ln x - a) - a = 0$

$\Rightarrow a(\ln x - a) = a \Rightarrow \ln x - a = 1$

$\Rightarrow \ln \cancel{x} = 1 + a \Rightarrow \boxed{x = e^{1+a}}$

تُصنف النقطة - بحسب المشتقة الثانية $f''(x)$.

بما ان المقام في $f'(x)$ موجب لذلك اشارة $f''(x)$ في نقطة

الشك تُحدد حسب اشارة مشتقة البسط

$$f'(x) = a(\ln x - a) - a$$
المشتقة

المشتقة $f'(x) = a\ln x - a^2 - a$

المشتقة الثانية $f''(x) = a \cdot \frac{1}{x}$

$$f''(e^{a+1}) = a \cdot \frac{1}{e^{a+1}} = + \cdot + = +$$

اذا $x = e^{a+1}$ مينيمام.

نجد الاحداثي y للنقطة القصوى

$$f(e^{a+1}) = \frac{a \cdot e^{a+1}}{\ln e^{a+1} - a} = \frac{a \cdot e^{a+1}}{a+1-a} = a \cdot e^{a+1}$$

اذا: $(e^{a+1}, a \cdot e^{a+1})$ نقطة مينيمام

3.ب نفحص هل المحور y خط تقارب ام هنالك ثقب في $x=0$

$$\lim_{x \to 0} f(0^+) = \frac{a(0.001)}{\ln(0.001) - a} = 0$$

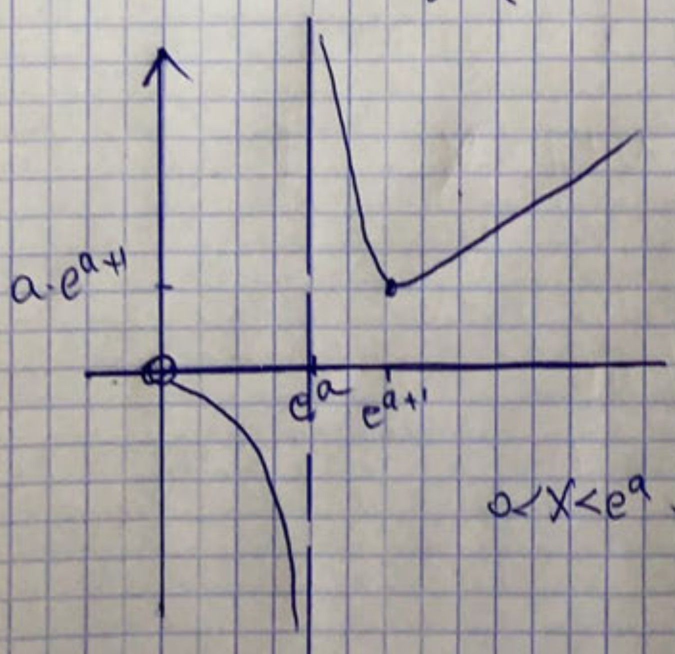
اذا $(0,0)$ ثقب.

نفحص تعرف الدالة في المجال
$0 < x < e^a$

$$f'(1) = \underset{+}{\underline{a(\ln 1 - a) - a}}$$

$$f'(1) = \frac{a(-a) - a}{+} = \frac{-a^2 - a}{+} < 0$$

اذا الدالة تنازلية في المجال $0 < x < e^a$



ب $g(x)=\frac{1}{f(x)}$

(ب1) مجال التعريف $f(x)\neq 0$ أو $f(x)$ غير معرفة.

لا تساوي صفر أبداً

$x>0,\ x\neq e^a$

لذلك مجال تعريف الدالة $g(x)$ هو $0<x<e^a$

$x>e^a$

(ب2) $g'(x)=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

وبالتالي النقاط القصوى لـ g و f نفس الإحداثي x لها ولكن نوعها مختلف

أي: $\left(e^{a+1}, \frac{1}{a\cdot e^{a+1}}\right)$ נק' מקסימום $g(x)$.

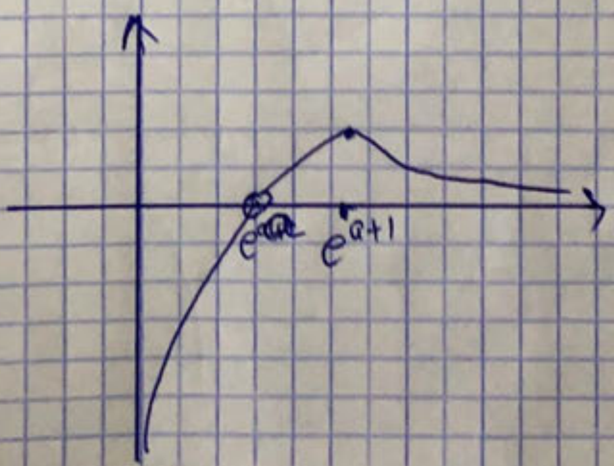
3) نفحص تصرف الدالة بجوار النقاط غير المعرفة وأطراف المجال

$g(x)=\frac{\ln x-a}{ax}$

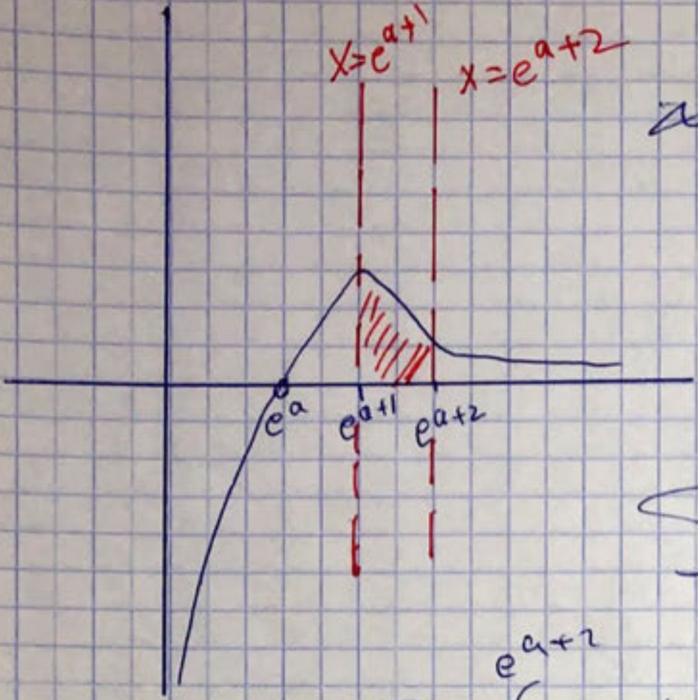
$\lim_{x\to 0} g(x)=\frac{\ln 0^+-a}{a\cdot 0^+}=-\infty$

$\lim_{x\to e^a}=\frac{\ln e^a-a}{a\cdot e^a}=\frac{a\ln e-a}{ae^a}=\frac{a-a}{ae^a}=0$

أي: $(e^{a},0)$ ثقب



ب - معطى أنّ المساحة
هي 3.



$$S_{\text{المساحة}} = \int_{e^{a+1}}^{e^{a+2}} f(x)\,dx$$

$$S_{\text{المساحة}} = \int_{e^{a+1}}^{e^{a+2}} \frac{\ln x - a}{ax}\,dx$$

$$\Longrightarrow S_{\text{المساحة}} = \int_{e^{a+1}}^{e^{a+2}} \frac{1}{ax}\cdot(\ln x - a)\,dx = \frac{1}{a}\int_{e^{a+1}}^{e^{a+2}} \underbrace{\frac{1}{x}}_{T'(x)}\cdot\underbrace{(\ln x - a)}_{T(x)}\,dx$$

$$S_{\text{المساحة}} = \frac{1}{a}\int_{e^{a+1}}^{e^{a+2}} T'(x)\cdot T(x)\,dx = \frac{1}{a}\cdot\left[\frac{T^2(x)}{2}\right]_{e^{a+1}}^{e^{a+2}}$$

$$S_{\text{المساحة}} = \left[\frac{1}{2a}(\ln x - a)^2\right]_{e^{a+1}}^{e^{a+2}} = 3$$

$$= \frac{1}{2a}\left[(\ln e^{a+2} - a)^2 - (\ln e^{a+1} - a)^2\right] = 3$$

$$= \frac{1}{2a}\left[(\cancel{a}+2-\cancel{a})^2 - (\cancel{a}+1-\cancel{a})^2\right] = 3$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\underbrace{\underbrace{2^2 - 1^2}_{4-1}}_{3}\right] = 3 \Longrightarrow \frac{3}{2a} = 3$$

$$\Longrightarrow 2a = 1 \Longrightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

سؤال 5

$$f(x)=9^{-x}-6\cdot 3^{-x}+m$$

.1P الدالة معرفة لكل x

.2P محاذيات عمودية لا يوجد لأن الدالة معرفة لكل x

محاذيات أفقية:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{9^{-\infty}}_{0}-\underbrace{6\cdot 3^{-\infty}}_{0}+m\right)=m$$

محاذي أفقي $\boxed{y=m}$ $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(9^{\infty}-6\cdot 3^{\infty}+m\right)\to\infty$$

.3P

$$f'(x)=-1\cdot 9^{-x}\cdot \ln 9-6\cdot(-1)\cdot 3^{-x}\cdot \ln 3$$

$$f'(x)=-9^{-x}\cdot \ln 9+6\cdot \ln 3\cdot 3^{-x}$$

$$f'(x)=-3^{-2x}\cdot 2\ln 3+(6\cdot \ln 3)\cdot 3^{-x}=0$$

نفرض $3^{-x}=t$

$$f'(x)=-t^2\cdot 2\ln 3+6\ln 3\cdot t=0$$

$$(-2\ln 3)\,t\,(t-3)=0$$

(غير ممكن) $t=0$ او $\boxed{t=3}$ $\Longrightarrow 3^{-x}=3^{1}\Longrightarrow \boxed{x=-1}$

اذاً $\boxed{x=-1}$ نقطة شك:

x	$x<-1$ ($x=-2$)	-1	$x>-1$ ($x=0$)
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f(-2)=-<0$

$f(0)=+>0$

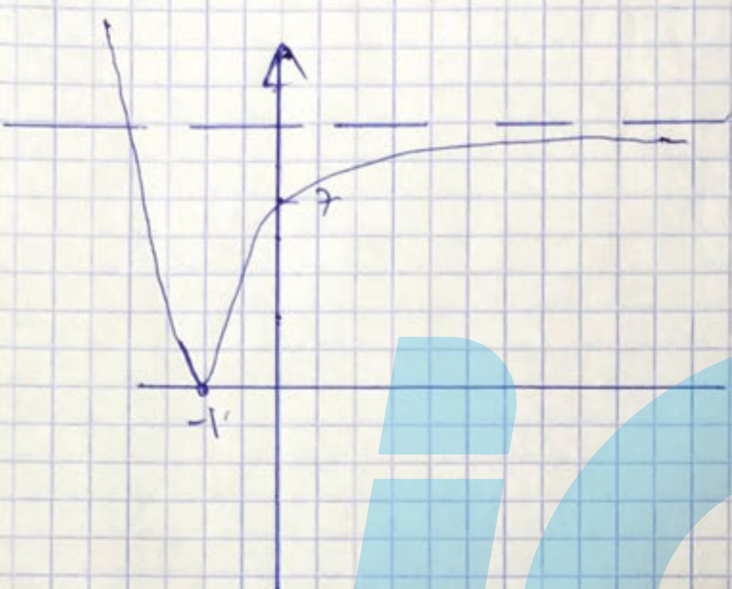
$f(-1)=9-18+m=-9+m$

$(-1,-9+m)$ min

ب. بما ان المحور x هو مماس للدالة اذاً الاحداثي x للنقطة القصوى هو 0 :

$$-9+m=0 \Longrightarrow \boxed{m=9}$$

$\boxed{1.\text{ج}}$

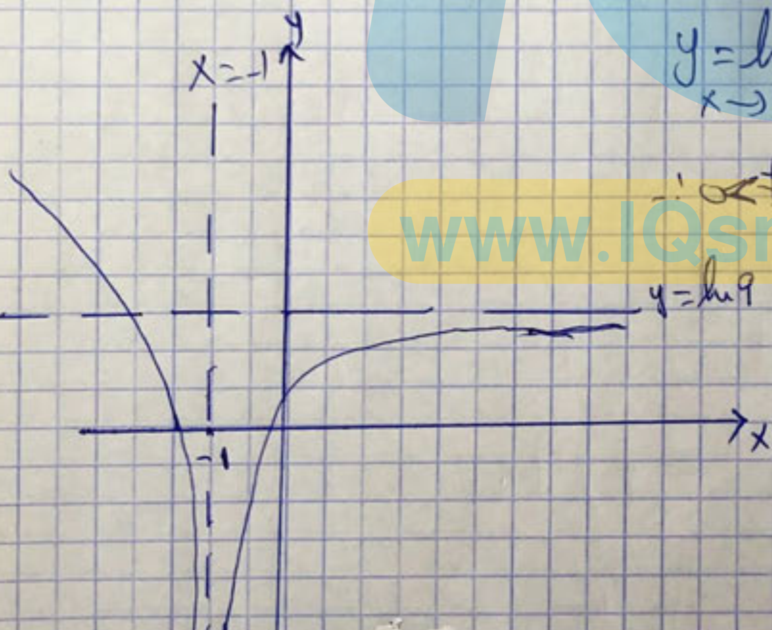


$\boxed{2.\text{ج}}$

$\ln f(x)$ ← غير معرفة في $\boxed{x=-1}$ لأنه عندها $f(-1)=0$

وبالتالي $x=-1$ خط تقارب عمودي

خط تقارب افقي $\underset{x\to+\infty}{y=\ln 9}$



في المجال التي تحقق $1 > f(x) > 0$:

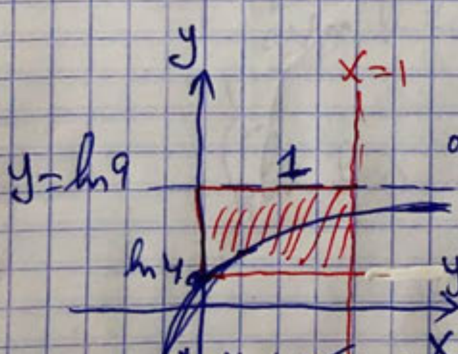
$\ln f(x) < 0$

في النقاط $f(x)=1$

$\ln f(x)=0$

د. $\int_0^1 [\ln f(x) - \ln(4)] < \ln\left(\frac{9}{4}\right) \leftarrow (\ln 9 - \ln 4)$

التكامل المطلوب هو مستطيل طوله وحدة واحدة وعرضه $\ln 9 - \ln 4$ وواضح انه اكبر من المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)$ والمستقيم $y=\ln 4$



ولذلك مساحة المستطيل = $\ln 9 - \ln 4$ أكبر من التكامل المطلوب